Pythagoreiska taltripplar

In right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle.

Euclid's Elements, Book I, Proposition 47
Euclid

Emilia Dunfelt
Hermods Distansgymnasium
Höstterminen 2017

Handledare
Andreas Josefsson

Abstract

The following paper analyses the properties of the Pythagorean triplets - integer triplets satisfying the Pythagorean theorem. Three questions are reviewed and successfully answered. Several methods for efficiently constructing Pythagorean triplets, primitive as well as nonprimitive, are explored. The most famous, as well as effective method proved to be Euclid's method. Furthermore, possible integer sides of Pythagorean triangles are investigated, resulting in the conclusion that all positive integers $n > 2$, but no $n \equiv 2 \pmod 4$, appear as either a leg or hypotenuse in at least one primitive Pythagorean triplet. Finally, formulas for determining the number of triplets with an integer side n are identified. It is deduced that the frequency of the occurrence of a number as a side in a Pythagorean triangle strongly correlates with its prime factorization. Mainly elementary proofs are used to prove and analyze the properties in question.

Innehåll

1 Inledning

Ett av geometrins allra mest grundläggande samband är Pythagoras sats. Satsen ger ett vackert och samtidigt beundransvärt enkelt samband mellan sidornas kvadrater i en rätvinklig triangel. Redan i grundskolan introduceras Pythagoras sats som ett viktigt koncept inom geometrin, men det är först med en något djupare undersökning av satsen och dess konsekvenser som den nyfikne till fullo slås av dess rikedom och många tillämpningar. Vissa av de rätvinkliga trianglarna är extra lätta att räkna med eftersom alla deras tre sidor är naturliga tal. Dessa kallas för *pythagoreiska trianglar*, och det visar sig att de även besitter många, intressanta egenskaper. När jag påbörjade arbetet med föreliggande uppsats var de pythagoreiska trianglarna ett för mig relativt okänt område. Under arbetets gång har jag dock, med stigande glädje och förvåning, mötts av olika spännande resultat och en evig källa av ny kunskap kring detta område. Jag hoppas att detta arbete kan skänka denna glädje även till läsaren, och samtidigt uppmuntra och motivera till egna efterforskningar och funderingar kring koncepten som nämns. Förhoppningsvis kommer detta arbete vara till nöje både för de som besitter någorlunda grundläggande kunskaper i matematik, men även för de som är väl bekanta med ämnet.

1.1 Syfte och frågeställning

Arbetets syfte är att undersöka de pythagoreiska trianglarna och deras egenskaper. Uppsatsens fokus ligger på de primitiva pythagoreiska taltripplarna, eftersom slutsatser kring icke-primitiva taltripplar ofta kan härledas ur de primitiva. Metoder för att finna och bestämma pythagoreiska taltripplar är till stor del centrum för uppsatsen. Uppsatsens frågeställningar kan därför sammanfattas i följande punkter.

- Hur kan pythagoreiska taltripplar konstrueras?
- Vilka tal kan förekomma i pythagoreiska taltripplar?
- I hur många pythagoreiska trianglar kan talet n vara sida?

1.2 Bakgrund

Området pythagoreiska trianglar har en lång historia, kanske en av matematikens längsta. Naturligtvis resulterar detta i att det finns en uppsjö av litteratur i ämnet. Trots att Pythagoras är den som fått ge namn åt den viktiga satsen, återfinns material som tyder på att sambandet upptäckts betydligt tidigare än på 500-talet f.Kr. då Pythagoras levde. Det tidigaste beviset för att människor haft kunskap om de pythagoreiska talen härstammar från ca 1800 år f.Kr. På babyloniska stentavlor hittar man en lista med pythagoreiska tal. Utöver detta finns det även spår av människors kunskap om dessa tal från exempelvis Kina och Indien, även om den första riktiga formeln för att generera pythagoreiska taltripplar presenteras i Euklides *Elementa*, skriven först på 300-talet f.Kr. [5]

I detta arbete har flera verk använts som grund för de matematiska undersökningarna. Målet är att i så stor utsträckning som möjligt på egen hand bevisa och förklara de flesta teorier och satser. I vissa fall är det dock motiverat att använda den litteratur som finns i ämnet för att ge en mer fördjupande förklaring och analys av begrepp och satser. Framförallt har verken *Mathematics and Its History* av John Stillwell [5], *Recreations in the Theory of Numbers: the Queen of Mathematics Entertains* av Albert H. Beiler [1] och *An Introduction to the Theory of Numbers* av G. H. Hardy och E. M. Wright [2] använts för att förklara olika satser och begrepp. Utöver detta har artiklarna *Asymptotic Evaluation of Certain Totient Sums* [4] av Lehmer och *Fibonacci Number Triples* av Hordaham [3] använts för att besvara och undersöka enstaka frågor i uppsatsen.

1.3 Metod

De pythagoreiska talen undersöks först och främst genom att utgå ifrån fakta och satser i litteraturen. Dessa satser undersöks matematiskt och bevisas. I vissa fall används räknaren TI-84 till att skriva enklare program för att utföra olika beräkningar. Även programmet GeoGebra 5 används för att skapa simuleringar av matematiska situationer, samt för att skapa upplysande bilder. I uppsatsen används begreppen pythagoreisk taltrippel och pythagoreisk triangel i stort sett synonymt, ordet triangel används dock ofta för att belysa den geometriska konstruktionen.

Resultaten grundar sig på olika litterära källor, varför arbetet delvis kan ses som en litteraturstudie. De verk som valts ut till uppsatsen är alla författade av erkända matematiker, och hänvisas till i andra artiklar om ämnet. Genom sökningar i biblioteksdatabasen Primo har intressanta och relevanta verk hittats. Efterforskningar på källornas upphovsmän resulterar i trovärdiga resultat vilket innebär att de använda verken utgör en lämplig grund för arbetet.

2 Att konstruera pythagoreiska taltripplar

2.1 Elementära begrepp

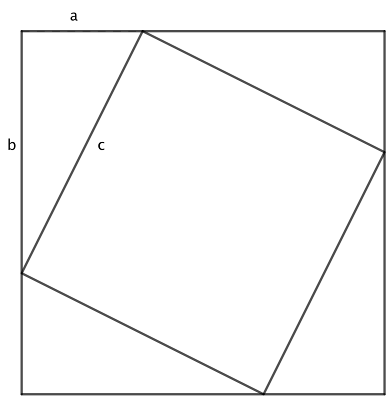
För att kunna förstå och undersöka de pythagoreiska taltripplarna, krävs förståelse även för Pythagoras sats. Satsen ger ett enkelt samband mellan de tre sidorna i en rätvinklig triangel.

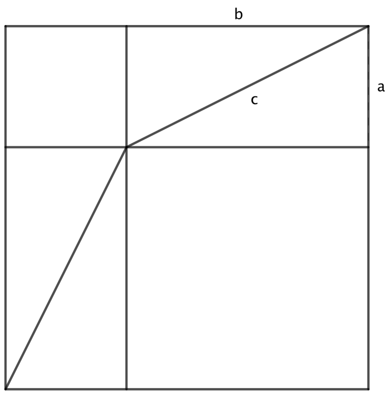
Sats 2.1. *För tre sidor a, b och c i en rätvinklig triangel gäller följande samband*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

där a och b utgör kateter och c utgör triangelns hypotenusa.

Bevis. Det finns otaliga bevis för Pythagoras sats, varav många är geometriska. Med hjälp av följande konstruktion kan Pythagoras sats bevisas på två sätt - dels geometriskt och dels algebraiskt. I den första figuren syns fyra trianglar,





Figur 1. Bevis av Pythagoras sats. [5]

och en inre kvadrat med arean c^2. I nästföljande figur har de fyra trianglarna flyttats och nu finns det i stället två mindre inre kvadrater a^2 och b^2. Av detta kan slutsatsen dras att $a^2 + b^2 = c^2$.

Det går även att se att arean av den yttre kvadraten i den första figuren är $(a+b)^2$. Detta motsvarar summan av den inre kvadratens area och areorna hos de fyra trianglarna, enligt

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab,$$

vilket innebär att $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

Således kan två tal, a och b, utgöra kateter i en rätvinklig triangel och längden på hypotenusan, c, kan beräknas med hjälp av Pythagoras sats.

I en *pythagoreisk triangel* är både a, b och c heltal, vilket gör dessa trianglar till specialfall av Pythagoras sats. De tre talen (a, b, c) kallas för en pythagoreisk taltrippel. Den mista pythagoreiska taltrippeln är (3, 4, 5). Multipler av pythagoreiska taltripplar resulterar i nya pythagoreiska trianglar, (6, 8, 10) är exempel på en sådan. Därför kan slutsatsen dras att det finns ett oändligt antal pythagoreiska taltripplar eftersom man från trippeln (a, b, c) kan framställa nya tripplar (na, nb, nc).

De pythagoreiska taltripplar vars tal inte har någon gemensam faktor kallas för primitiva, detta gör trippeln (3, 4, 5) till en primitiv pythagoreisk taltrippel [1]. Med hjälp av program 2 i Bilaga B är det möjligt att undersöka om en pythagoreisk taltrippel är primitiv eller inte.

2.2 Taltripplar med mönster

Det finns många olika sätt att framställa pythagoreiska taltripplar. En metod är att identifiera återkommande mönster och använda dessa för att framställa nya taltripplar. Ett exempel på ett sådant mönster är att den större kateten, b, och hypotenusan, c, följer på varandra samt att den minsta kateten, a, är ett udda tal. En sådan taltrippel skulle kunna skrivas (a, b, $b+1$), där a är ett udda tal ≥ 3. Med hjälp av detta samband är det alltså möjligt att generera tripplar som (3, 4, 5), (5, 12, 13) och (7, 24, 25).

Bevis. Eftersom a är ett udda tal kan det skrivas som $a = 2n+1$, där $n \geq 1$. Ett led i att kunna bevisa att det går att finna pythagoreiska tripplar som uppvisar mönstret (a, b, $b+1$) är att hitta ett samband mellan a och b. Detta kan göras genom att utgå ifrån Pythagoras sats. Enligt satsen vet vi att

$$a^2 + b^2 = (b+1)^2,$$

vilket innebär att

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} = 2n^2 + 2n.$$

Utifrån detta kan de tre talen undersökas med hjälp av Pythagoras sats.

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 = (2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 \\
&c^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 \\
&a^2 + b^2 = (b+1)^2
\end{aligned}$$

Det är därför möjligt att generera pythagoreiska trianglar som uppfyller (a, b, $b+1$), där a är ett udda tal, för olika heltalsvärden på a och b. $\square$

Exempel 2.1. Låt oss nu konstruera en triangel av typen $(a, b, b+1)$. Om $a = 25$ så kan det fastställda sambandet mellan a och b användas för att beräkna längden på sidan b.

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} = \frac{25^2 - 1}{2} = 312$$

Detta ger taltrippeln (25, 312, 313). Genom att köra talen i program 2 i Bilaga B verifieras att det verkligen är en pythagoreisk taltrippel. Den visar sig dessutom vara primitiv.

Ytterligare ett mönster som kan urskiljas när man tittar närmare är att det ofta förekommer taltripplar där skillnaden mellan kateten b och hypotenusan c är 2, samt där kateten a är ett jämnt tal. Dessa taltripplar kan skrivas som $(a, b-1, b+1)$, där a är ett jämnt tal. Detta samband ger bland annat de pythagoreiska taltripplarna (6, 8, 10), (8, 15, 17) och (10, 24, 26).

Bevis. Enligt samma resonemang som tidigare kan a skrivas som $a = 2n$, eftersom det är ett jämnt tal, där $n \geq 3$. Sambandet mellan a och b kan, liksom tidigare, hittas med hjälp av Pythagoras sats.

$$a^2 + (b-1)^2 = (b+1)^2$$

Detta innebär att $b = \frac{a^2}{4} = n^2$. Nu kan talen undersökas för att verifiera att de uppfyller Pythagoras sats.

$$\begin{aligned}
&a^2 + (b-1)^2 = (2n)^2 + (n^2-1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1\\
&(b+1)^2 = (n^2+1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1\\
&a^2 + (b-1)^2 = (b+1)^2
\end{aligned}$$

Det finns alltså ett oändligt antal pythagoreiska taltripplar av formen $(a, b-1, b+1)$, där a är ett jämnt tal. $\square$

Exempel 2.2. För att konstruera en taltrippel av typen $(a, b-1, b+1)$ väljs inledningsvis ett värde för a. Om $a = 32$ kan sambandet mellan a och b användas för att bestämma b.

$$b = \frac{a^2}{4} = \frac{32^2}{4} = 256$$

Detta ger taltrippeln (32, 255, 257) som då den körs i program 2 i Bilaga B visar sig vara en primitiv taltrippel.

Det finns fler mönster att upptäcka hos de pythagoreiska trianglarna, läsaren uppmanas att själv undersöka de mönster som går att hitta för att på så sätt kunna hitta egna metoder att framställa taltripplar av en vis typ. Till dylika undersökningar kan listan över alla pythagoreiska trianglar med hypotenusa ≤ 100 i Bilaga A vara till nytta.

2.3 Euklides metod

De metoder som användes i förra avsnittet för att konstruera pythagoreiska taltripplar byggde på att finna återkommande mönster. Denna metod, om än intressant, är dock inte särskilt effektiv för att finna *alla* pythagoreiska taltripplar. För att finna andra metoder som fungerar bättre krävs ett annat resonemang.

Pythagoreiska taltripplar är tal som uppfyller Sats 2.1. Detta kan, efter division med c, skrivas om till

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Låt nu $\frac{a}{c} = x$ och $\frac{b}{c} = y$, vilket ger

$$x^2 + y^2 = 1,$$

det vill säga enhetscirkelns ekvation. Den rationella parametriseringen av denna är

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

för olika värden på $t = \frac{q}{p}$, där p och q är naturliga tal [5]. Följaktligen går det att hitta ett sätt att uttrycka a, b och c med hjälp av p och q.

$$x = \frac{a}{c} = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$
$$y = \frac{b}{c} = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2pq}{p^2+q^2}$$

Vilket ger följande sats:

Sats 2.2. *Alla primitiva pythagoreiska taltripplar, (a, b, c), kan konstrueras genom*

$$\begin{aligned} a &= p^2 - q^2, \\ b &= 2pq, \\ c &= p^2 + q^2, \end{aligned}$$

där p och q är tal av olika paritet, $p > q$, samt $GCD(p, q) = 1$.

Detta kallas ibland för *Euklides formel* och genererar alla primitiva, samt vissa icke-primitiva, pythagoreiska taltripplar för olika värden på p och q. De flesta icke-primitiva taltripplar kan konstrueras genom att p och q har lika paritet eller genom att talen inte är relativt prima. Ett enkelt bevis för Sats 2.2. följer nedan.

Bevis. Låt c vara hypotenusa i en primitiv pythagoreisk taltrippel. Det gäller då att $c = p^2 + q^2 = (p + qi)(p - qi)$. Detta ger

$$\begin{aligned} c^2 &= (p + qi)^2(p - qi)^2 \\ &= (p^2 + 2pqi - q^2)(p^2 - 2pqi - q^2) = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2. \end{aligned}$$

Så Sats 2.2. visar sig vara sann då hypotenusan c faktoriseras i ringen av gaussiska tal. □

Alla multipler av de primitiva pythagoreiska taltripplarna kan som sagt inte konstrueras med hjälp av Sats 2.2., bland annat är det inte möjligt att finna trippeln 3·(3, 4, 5) = (9, 12, 15) för några värden på p och q. För att lösa detta problem kan Sats 2.2. skrivas som

$$\begin{aligned} a &= r(p^2 - q^2) \\ b &= 2pqr \\ c &= r(p^2 + q^2) \end{aligned}$$

för något heltalsvärde på r. Detta är alltså en generell metod för att konstruera pythagoreiska taltripplar. I Bilaga B hittas program 1 som konstruerar pythagoreiska taltripplar med hjälp av Euklides formel.

Exempel 2.3. En pythagoreisk taltrippel kan konstrueras med Euklides metod genom att först välja två värden för p och q. Låt $p = 17$ och $q = 12$, detta borde generera en primitiv pythagoreisk taltrippel.

$$\begin{aligned} a &= 17^2 - 12^2 = 145 \\ b &= 2 \cdot 17 \cdot 12 = 408 \\ c &= 17^2 + 12^2 = 433 \end{aligned}$$

Detta ger taltrippeln (145, 408, 433), som mycket riktigt visar sig vara primitiv då den körs i program 2.

2.4 Taltripplar med fibonaccital

Ytterligare ett sätta att generera pythagoreiska taltripplar, som bevisats av Alwyn Horadam, är med hjälp av fibonaccitalen. I Fibonaccis talserie motsvarar varje tal summan av de två föregående talen. De första talen i serien är 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 och 13. Hordaham visade att pythagoreiska taltripplar kan konstrueras på följande vis:

Sats 2.3. *Primitiva pythagoreiska taltripplar kan konstrueras genom*

$$(H_nH_{n+3})^2 + (2H_{n+1}H_{n+2})^2 = (2H_{n+1}H_{n+2} + H_n^2)^2$$

där H_n, H_{n+1}, H_{n+2} och H_{n+3} är fyra på varandra följande tal i Fibonaccis talserie [3].

Med hjälp av fibonaccitalen kan alla primitiva pythagoreiska taltripplar konstrueras, på samma sätt som med Euklides formel.

Bevis. Låt $(p-q)$, q, p och $(q+p)$ vara fyra på varandra följande fibonaccital. Enligt Sats 2.3. ger detta

$$\begin{aligned}
a &= (p-q)(q+p) = p^2 - q^2 \\
b &= 2pq \\
c &= 2qp + (p-q)^2 = p^2 + q^2
\end{aligned}$$

vilket känns igen från Sats 2.2. som Euklides formel. Detta innebär alltså att hos fyra fibonaccital motsvarar det andra och det tredje av fibonnacitalen p och q i Euklides formel. □

Exempel 2.4. Genom att först välja fyra fibonaccital kan en pythagoreisk taltrippel framställas. Vi använder fibonaccitalen, $H_n = 21$, $H_{n+1} = 34$, $H_{n+2} = 55$ och $H_{n+3} = 89$.

$$\begin{aligned}
&(21 \cdot 89)^2 + (2 \cdot 34 \cdot 55)^2 = (2 \cdot 34 \cdot 55 + 21^2)^2 \\
&1869^2 + 3740^2 = 4181^2
\end{aligned}$$

Detta ger alltså den primitiva pythagoreiska taltrippeln (1869, 3740, 4181).

3 Sidor i pythagoreiska trianglar

Inledningsvis är det givande att undersöka hur sidornas paritet förhåller sig i primitiva såväl som icke-primitiva pythagoreiska taltripplar.Vid en granskning verkar de bara förekomma som (udda, jämn, udda), (jämn, udda, udda) och (jämn, jämn, jämn).

Sats 3.1. *I primitiva pythagoreiska taltripplar, (a, b, c), är c alltid udda, och en av kateterna a och b är udda.*

Bevis. Beviset är relativt enkelt att förstå. Villkoret utifrån Euklides formel är att p och q har olika paritet, att $p > q$ samt att $GCD(p, q) = 1$. Kateten $b = 2pq$ och kommer därför att vara ett jämnt tal. Därför måste den andra kateten a ges av $p^2 - q^2$. Då p och q har olika paritet resulterar det i att $a = (2n + 1)^2 - (2m)^2 = 2(2n^2 + 2n - 2m^2) + 1$, vilket innebär att a är ett udda tal. Detta ger också en udda hypotenusa, c, eftersom $(2i+1)^2+(2j)^2 = 4(i^2 + i + j^2) + 1$. □

Sats 3.2. *För alla pythagoreiska taltripplar, (a, b, c), gäller antingen att c är udda och att a eller b är udda, eller att a, b, och c alla är jämna tal.*

Bevis. Det har redan visats att en av kateterna är jämn, $b = 2pq$, och eftersom hypotenusans paritet ges av kateternas behöver pariteten hos a undersökas. Som visats ovan ger en udda katet a en udda hypotenusa. Om a är ett jämnt tal innebär det att pariteten hos p och q är lika. Pariteten hos hypotenusan blir då $(2n)^2 + (2m)^2 = 4(n^2 + m^2)$, vilket alltså innebär att alla tre sidorna är jämna. □

3.1 Den korta kateten

För att komma igång med undersökningen av sidornas längd i de pythagoreiska trianglarna kan listan i Bilaga A vara till hjälp. Efter en stunds granskning blir det tydligt att de enda tal som inte tycks förekomma som katet i någon pythagoreisk triangel är talen 1 och 2 samt talet 4 som inte förekommer som minsta katet. Vi formulerar och bevisar detta med följande lemma:

Lemma 3.1. *Talen 1 och 2 kan inte utgöra katet i någon pythagoreisk triangel, och talet 4 kan inte utgöra minsta katet.*

Bevis. Om talet 1 ska kunna vara katet i någon pythagoreisk triangel innebär det att likheten $1 = c^2 - a^2$, då $b = 1$ utan inskränkning av allmängiltigheten, måste uppfyllas för två heltal c och a. Att differensen mellan talens kvadrater är 1 innebär att de följer på varandra, vilket inte är möjligt för två kvadrattal. Den minsta möjliga differensen mellan två på varandra följande kvadrattal n och $(n + 1)$ är $(2n + 1)$, alltså är det omöjligt att talet 1 är katet i en pythagoreisk triangel.

På samma sätt, om talet 2 är katet i en pythagoreisk triangel får vi likheten $4 = c^2 - a^2$. Detta skulle dels kunna innebära att $c = 2$ samt att $a = 0$, vilket inte är möjligt. Om uttrycket faktoriseras uppstår följande två likheter $c+a=2$ och $c-a=2$, vilket inte är möjligt för några heltalsvärden på a och c. Alltså kan inte heller 2 vara katet i någon pythagoreisk triangel.

Det finns två sätt som talet 4 kan vara katet i en pythagoreisk triangel enligt Euklides formel. Det första alternativet innebär likheten $4 = p^2 - q^2$, detta innebär att $p = 2$ och $q = 0$ vilket är omöjligt i en pythagoreisk triangel. Det andra alternativet är att $4 = 2pq$, vilket leder till att $p = 1$ och $q = 2$, men dessa två värden på p och q leder till den pythagoreiska taltrippeln $(3, 4, 5)$. Således kan inte talet 4 vara minsta katet i någon pythagoreisk triangel. $\square$

Låt oss nu gå vidare med problemet och avgöra vilka tal som kan utgöra minsta katet i de pythagoreiska trianglarna, med hjälp av följande sats:

Sats 3.3. *Alla tal $n > 2$, utom tal $n \equiv 2 \pmod 4$ och talet 4, kan utgöra minsta katet i primitiva pythagoreiska trianglar.*

Bevis. För att avgöra om ett tal, n, kan vara minsta katet i en pythagoreisk triangel kan de olika möjliga pariteterna för sidans längd undersökas. Beviset delas upp i två fall.

1. Talet n är udda

   Låt den korta kateten $a = n$, där n är ett udda tal. För att detta ska gälla enligt Euklides formel är
   $$p = \frac{n+1}{2}, \quad q = \frac{n-1}{2}.$$
   Detta ger sidorna
   $$b = \frac{n^2-1}{2}, \quad c = \frac{n^2+1}{2}.$$
   Resultatet kan kontrolleras med Pythagoras sats, vilket ger
   $$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^2+1}{4} \\ c^2 &= \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^2+1}{4} \\ a^2+b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

   Här blir det också tydligt att det udda talet blir minsta katet medan den andra kateten är ett jämnt tal samt hypotenusan är udda, vilket stämmer med Sats 3.1. Det är alltså möjligt att skriva alla udda tal som en differens av två kvadrater. Enligt Euklides formel kan den udda kateten ges av $n = p^2 - q^2$, där p och q har olika paritet, $\gcd(p, q) = 1$, samt $p > q$. Detta betyder antingen att n kan skrivas som $4m + 1$ eller $4m - 1$ för något naturligt tal m. Alltså innebär det att för udda n är $n \equiv 1 \pmod 4$ eller $n \equiv 3 \pmod 4$.

2. Talet n är jämnt
   Om den korta kateten är ett jämnt tal kan dess längd ges av ekvationen $a = 2pq$, där exempelvis $q = 1$. Detta innebär, enligt Euklides formel att $a = 2p$, $b = p^2 - 1$ och $c = p^2 + 1$. Eftersom q i det här fallet är ett udda tal måste p vara ett jämnt tal om triangeln ska vara primitiv, vilket innebär att den minsta kateten $a \equiv 0 \pmod 4$. De andra två sidorna är udda tal, vilket stämmer med Sats 3.1.
   De andra jämna talen (exempelvis talet 6) kan skrivas som en produkt av 2 och ett udda tal, $2(2m + 1)$. Om denna sida ges av $2pq$ måste p och q ha lika paritet för att deras produkt ska kunna ge det udda talet $2m + 1$. Om $2(2m + 1)$ istället ges av $p^2 - q^2$ leder det också till slutsatsen att p och q måste ha samma paritet, vilket innebär att det inte är en primitiv taltrippel. Alltså kan endast jämna tal $n \equiv 0 \pmod 4$ utgöra minska katet i primitiva pythagoreiska trianglar.

□

3.2 Den långa kateten

En inledande observation vad gäller den långa kateten, b, är att alla tal tycks vara sammansatta, det verkar med andra ord inte finnas något primtal i mängden av alla långa kateter.

Sats 3.4. *Alla tal b, som uppfyller Pythagoras sats $a^2 + b^2 = c^2$ är sammansatta tal.*

Bevis. Vi utför ett motsägelsebevis. Antag att det finns primtal i mängden av alla långa kateter. Dessa måste ges av $b = p^2 - q^2$, eftersom $b = 2pq$ omöjligt kan ge ett primtal. Om uttrycket faktoriseras som $b = (p + q)(p - q)$ blir det tydligt att uttrycket $(p - q)$ måste vara enheten 1 om b är ett primtal. Kateten b kan då uttryckas som $b = (q + 1)^2 - q^2 = 2q + 1$. Den andra kateten a blir då $a = 2(q + 1)q = 2q^2 + 2q$. Det visar sig nu att $a > b$ eftersom $2q^2 + 2q > 2q + 1$. Alltså är talet a den mellersta kateten om talet b är ett primtal. □

Längden hos den långa kateten kan beskrivas av två olika satser beroende på dess paritet.

Sats 3.5. *Kateten $b = 2pq$ är ett jämnt tal, $b \equiv 0 \pmod 4$, i en primitiv pythagoreisk taltrippel, då $p < (1+\sqrt{2})q$.*

Bevis. Om b är ett jämnt tal ges kateten av uttrycket $2pq$. Detta ger olikheten $p^2 - q^2 < 2pq$. Denna löses

$$\begin{aligned}
&p^2 - q^2 < 2pq \\
&p^2 - 2pq - q^2 < 0 \\
&t^2 - 2t - 1 < 0 \quad \text{för } t = \frac{p}{q} \\
&t < 1 + \sqrt{2} \\
&p < (1+\sqrt{2})q
\end{aligned}$$

Utöver detta gäller som tidigare att $p > q$ samt $p > 0$ och $q > 0$. Eftersom b ges av $2pq$ gäller det också att $b \equiv 0 \pmod 4$. □

Sats 3.6. *Kateten $b = mn$ är ett udda tal, $b \equiv 1 \pmod 4$ eller $b \equiv 3 \pmod 4$, då $m < (1+\sqrt{2})n$.*

Bevis. Enligt Sats 3.4. är b ett sammansatt tal, och då b är udda kan talet därför skrivas $b = mn$ för två udda tal m och n. Detta innebär också att $b \equiv 1 \pmod 4$ eller $b \equiv 3 \pmod 4$.

För att kunna finna villkoret för att b ska vara den udda mellersta kateten måste uttryck för sidorna a och c hittas. Eftersom b är en produkt av två udda tal innebär det enligt Euklides formel att $b = p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$, alltså är $m = p + q$ och $n = p - q$. Pythagoras sats ger dessutom likheten $b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$, vilket ger

$$\begin{cases} c + a = m^2 \\ c - a = n^2. \end{cases}$$

Detta resulterar i den pythagoreiska taltrippeln

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{2}, mn, \frac{m^2 + n^2}{2}\right).$$

För att $b = mn$ ska vara den största kateten krävs det nu att olikheten

$$\frac{m^2 - n^2}{2} < mn$$

uppfylls. Denna olikhet kan lösas med hjälp av andragradsekvationen $t^2 - 2t - 1 = 0$ på samma sätt som i beviset av Sats 3.5, detta ger olikheten

$m < (1+\sqrt{2})n$. Utöver detta gäller naturligtvis även att $m > n$ samt $n > 0$. Det är även möjligt att återsubstituera p och q i olikhetsuttrycket, vilket dock ger det mindre "lättlästa" uttryck som visas i följdsatsen nedan. $\square$

Följande följdsats sammanfattar vilka tal som kan utgöra den längre kateten b.

Följdsats 3.1. *Talet n kan utgöra den långa kateten i primitiva pythagoreiska trianglar då*

$$n = \begin{cases} 2pq & \text{för } p < (1+\sqrt{2})q \\ p^2 - q^2 & \text{för } q < \dfrac{\sqrt{2}p}{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

3.3 Hypotenusan

Att bestämma vilka tal som kan vara hypotenusa, c, i en pythagoreisk taltrippel, är en betydligt mer komplicerad fråga att besvara än att avgöra vilka tal som kan vara kateter. Det handlar om att hitta tal som går att skriva som en summa av två heltalskvadrater, men som samtidigt är kvadrater själva. Problemet kan först ses som ett problem att finna alla tal som kan skrivas som en summa av två kvadrater. Genom att titta på Diofantos teori för produkten av summan hos två kvadrater kan man inse att problemet rör sig om att finna de primtal som kan skrivas som en summa av två kvadrater. Diofantus upptäckte följande samband

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)&(c^2+d^2) \\ &= (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 \\ &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.\end{aligned}$$

Produkten av två olika "tvåkvadratstal" resulterar i ytterligare två nya tvåkvadratstal. [5]

Ser man till de pythagoreiska trianglarna betyder detta att produkten av två hypotenusor ger ytterligare två pythagoreiska trianglar med samma hypotenusa. Därför gäller det att finna de primfaktorer som går att skriva som summan av två kvadrater, eftersom dessa kan ge alla andra hypotenusor. Detta problem löstes av Pierre de Fermat på 1600-talet:

Sats 3.7. *Ett primtal, $p \equiv 1 \pmod 4$, kan skrivas som en summa av två kvadrater.*

Det första beviset till denna sats gavs av Euler.[5] Ett mycket uttömmande bevis för denna sats finns bland annat att läsa i *An Introduction to the Theory of Numbers* av G. H. Hardy och E. M. Wright, kapitel 20 [2]. Denna typ av primtal kallas för *pythagoreiska primtal*, och är alltså de "pythagoreiska primfaktorer" vi ursprungligen sökte.

Exempel 3.1. Ett pythagoreiskt primtal $p \equiv 1 \pmod 4$, är talet 41. Detta tal kan skrivas som en summa av två kvadrater eftersom

$$41 = 4^2 + 5^2$$

Därför kan talet även utgöra hypotenusa i den pythagoreiska triangel som Euklides formel ger för $p = 5$ och $q = 4$, det vill säga den primitiva trippeln (9, 40, 41).

Med hjälp av Fermats sats blir det alltså tydligt att alla primtal $p \equiv 1 \pmod 4$ kan vara hypotenusor i pythagoreiska trianglar. Frågan är nu hur alla tal som kan vara hypotenusa i primitiva taltripplar kan hittas.

Sats 3.8. *Om p är ett pythagoreiskt primtal, $p \equiv 1 \pmod 4$, kan även alla tal p^k vara hypotenusa i en primitiv pythagoreisk triangel.*

Bevis. Genom induktion. Låt p vara ett pythagoreiskt primtal $p = a^2 + b^2$, där a och b har olika paritet samt saknar gemensam nämnare. Induktionshypotesen, $P(k)$, är att $p^k = x^2 + y^2$, där x och y saknar gemensam nämnare samt har olika paritet.

Induktionsbas: Bassteget, $P(1)$, stämmer eftersom $p^1 = a^2 + b^2$.

Induktionssteg: Antag nu att $P(k)$ är sant, fallet $P(k + 1)$ ger då

$$\begin{aligned} p^{k+1} = p^1 p^k &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ &= (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \\ &= (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 \end{aligned}$$

vilket bevisar att hypotesen håller för $P(k + 1)$. Så påståendet stämmer för $k \geq 1$. □

Sats 3.9. *Om $p_1, p_2, \ldots, p_n$ är pythagoreiska primtal, $p_i \equiv 1 \pmod 4$, kan även produkten av flera pythagoreiska primtal, $c = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{n-1}^{k_{n-1}} p_n^{k_n}$ vara hypotenusa i en primitiv pythagoreisk triangel.*

Bevis. Genom stark induktion. Låt p vara ett pythagoreiskt primtal $p = c^2 + d^2$, där c och d har olika paritet samt är relativt prima. Induktionshypotesen, $P(n)$, är att produkten $q = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{n-1}^{k_{n-1}} p_n^{k_n}$ kan skrivas som

$q = x^2 + y^2$, där x och y saknar gemensam nämnare samt har olika paritet.

Induktionsbas: Bassteget, $P(1)$, stämmer eftersom $p_1^{k_1} = (c^2 + d^2)^{k_1}$, vilket enligt tidigare Lemma kan utgöra hypotenusa i en primitiv pythagoreisk triangel.

Induktionssteg: Antag nu att $P(1)$, $P(2)$, ... , $P(n)$ stämmer. $P(n+1)$ ger då

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} p_{n+1}^{k_{n+1}} = (x^2 + y^2) p_{n+1}^{k_{n+1}}$$

Låt nu $p_{n+1}^{k_{n+1}} = a^2 + b^2$, detta ger

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) p_{n+1}^{k_{n+1}} &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ &= (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \\ &= (ax - by)^2 + (ay + bx)^2\end{aligned}$$

vilket bevisar att hypotesen håller för $P(n+1)$. Alltså stämmer påståendet för $P(n)$. □

Efter dessa satser är vi nu framme vid den slutliga satsen som är en naturlig följd av de två tidigare bevisen.

Följdsats 3.2. *Talet c är hypotenusa i en primitiv pythagoreisk triangel om och endast om alla dess primfaktorer är pythagoreiska $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Exempel 3.2. Om flera pythagoreiska primtal multipliceras samman fås ett tal som kan utgöra hypotenusa i en primitiv pythagoreisk taltrippel.

$$c = 5 \cdot 17 \cdot 73 = 6205$$

Då detta tal körs i program 3 i Bilaga 2 visar det sig att det kan utgöra hypotenusa i fyra olika primitiva pythagoreiska trianglar.

Det går nu att notera att alla tal $n > 2$ utom tal $n \equiv 2 \pmod 4$ kan utgöra sida i någon primitiv pythagoreisk triangel. För primitiva *och* icke-primitiva pythagoreiska taltripplar gäller det därför att alla tal $n > 2$ kan utgöra sida. Detta eftersom alla jämna tal kan ges av $n = 2pq$ där $p = 1$ och $q = \frac{n}{2}$, och de udda talen ges av $n = p^2 - q^2$ där $p = \frac{n+1}{2}$ och $q = \frac{n-1}{2}$.

Som slutsats är det även värt att besvara frågan om vilka tal som kan vara hypotenusa i icke-primitiva pythagoreiska trianglar. Det har tidigare nämnts att för en pythagoreisk taltrippel $(a,\ b,\ c)$ finns det ytterligare ett oändligt antal taltripplar $(na,\ nb,\ nc)$. Detta innebär alltså att om c är sammansatt av enbart pythagoreiska primfaktorer och multipliceras med ett tal utan primfaktorer $p \equiv 1 \pmod 4$, kan även detta tal, nc, utgöra hypotenusa - men endast i icke-primitiva trianglar.

4 Antalet trianglar med sidan n

4.1 Antalet trianglar n kan vara katet i

Som tidigare nämnts kan alla tal > 2 utgöra katet i icke-primitiva pythagoreiska trianglar. När de pythagoreiska trianglarna undersöks framkommer det också att vissa tal förekommer oftare som kateter än andra tal. Ett exempel på ett ganska vanligt tal är talet 12, som förekommer fyra gånger som katet (se Bilaga A). Detta avsnitt behandlar frågan om hur antalet gånger ett tal förekommer som katet i en pythagoreisk triangel kan bestämmas.

Sats 4.1. *Det finns*

$$\mathcal{K}_p(n) = \begin{cases} 2^{r-1} \\ 0 & \text{för } n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

antal primitiva pythagoreiska trianglar med kateten n, då n har den entydiga primtalsfaktoriseringen $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$, samt $n > 2$.

Bevis. Beviset delas in i två fall beroende på pariteten hos n.

1. Talet n är jämnt
   I primitiva pythagoreiska trianglar ges den jämna kateten av uttrycket $n = 2pq$. Eftersom p och q har olika paritet, samt $p > q$, gäller det också att $n|4$. Därför förekommer det inga kateter av formen $n \equiv 2 \pmod 4$. Mängden $\mathrm{P}(n)$ av alla primfaktorer till talet n innehåller r stycken element. Eftersom $n = 2pq$ kan primtalsfaktorerna för talet n delas in i två delmängder, p och q. Antalet möjliga delmängder hos en mängd med r element beräknas som summan av antalet kombinationer av s element valda bland r element, för $s = 1, 2, \dots, r$. Det vill säga

   $$\sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} = 2^r.$$

   Denna ekvation ger dock alla delmängder av $\mathrm{P}(n)$, varav hälften motsvarar de alternativ då $q > p$. Därför måste uttrycket halveras, vilket ger

   $$\mathcal{K}_p(n) = \frac{2^r}{2} = 2^{r-1},$$

   då n är ett jämnt tal $n|4$.

2. Talet n är udda
   I primitiva pythagoreiska trianglar ges den udda kateten av $n = p^2 -$

$q^2 = (p+q)(p-q)$. Detta innebär att dess primfaktorer kan delas in i två mängder $(p+q)$ och $(p-q)$, på samma sätt som ovan, där $(p+q) > (p-q)$ samt båda är udda. Liksom tidigare ger detta

$$\mathcal{K}_p(n) = \frac{2^r}{2} = 2^{r-1}.$$

$\square$

Exempel 4.1. Låt $n = 36$, talet kan då faktoriseras enligt

$$n = 2^2 \cdot 3^2.$$

Eftersom n har två primfaktorer kan det utgöra katet i $2^{2-1} = 2$ primitiva pythagoreiska trianglar. I Bilaga A återfinns mycket riktigt en av de två primitiva tripplarna (36, 77, 85). Den andra primitiva taltrippeln är (36, 323, 325).

En sats för att avgöra hur i hur många primitiva och icke-primitiva trianglar n kan vara katet i presenteras i A. H. Beilers *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*, kapitel 14 [1]:

Sats 4.2. *Det finns*

$$\mathcal{K}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}((2e_0+1)(2e_1+1)(2e_2+1)\dots(2e_r+1)-1) & \textit{för jämna } n \\ \frac{1}{2}((2e_1+1)(2e_2+1)(2e_3+1)\dots(2e_r+1)-1) & \textit{för udda } n \end{cases}$$

antal pythagoreiska trianglar med kateten n, där n kan faktoriseras som $n = 2^{e_0} p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$.

4.2 Antalet trianglar n kan vara hypotenusa i

För att kunna avgöra i hur många primitiva pythagoreiska trianglar ett tal n kan vara hypotenusa i krävs det flera steg. Enligt Följdsats 3.2. känner vi till att hypotenusor i primitiva pythagoreiska trianglar är en produkt av primtal $p \equiv 1 \pmod 4$. Innan antalet primitiva pythagoreiska taltripplar med hypotenusan n bestäms, presenteras några inlednade hjälpsatser som rör de gaussiska talen. Gaussiska tal är komplexa tal $z = a + bi$ där både a och b är heltal. Den euklidiska ringen av gaussiska heltal brukar betecknas $\mathbb{Z}[i]$.

Lemma 4.1. *Om normen, $N(z) = p$, av ett gaussiskt heltal, $z = a + bi$, är ett primtal i $\mathbb{Z}$, är z ett primtal i $\mathbb{Z}[i]$.*

Bevis. Ett gaussiskt primtal är ett tal som inte vidare går att faktorisera i ringen av gaussiska tal. Låt $z = uw$ vara ett gaussiskt tal med normen $N(z) = p$, där p är ett primtal i $\mathbb{Z}$. På grund av normens multiplikativitet ger detta $N(z) = N(u)N(w) = p$. Eftersom p är ett primtal i $\mathbb{Z}$ kan $N(w) = 1$ utan inskränkning av allmängiltigheten. Detta innebär att w är en enhet i $\mathbb{Z}[i]$, och således är z ett primtal i $\mathbb{Z}[i]$. □

Lemma 4.2. *Alla gaussiska tal z, där $N(z) > 1$, har en unik, entydig primtalsfaktorisering $z = p_1 p_2 \ldots p_n$, undantaget faktorernas ordning samt förekomsten av associerade primtal.*

Bevis. Genom välordningsaxiomet. Antag att det finns gaussiska heltal som inte kan faktoriseras på ett unikt sätt, låt C beteckna mängden av alla dessa tal. I enlighet med välordningsaxiomet finns det nödvändigtvis ett minsta element $z \in C$. Detta element kan faktoriseras på ett icke-unikt sätt, enligt $z = p_1 p_2 \ldots p_m = q_1 q_2 \ldots q_n$. Men eftersom primfaktorn $p_i | z$ och $q_1 | z$ så $p_i | q_1$. Detta betyder att primtalen p_i och q_1 är associerade, det vill säga att $p_i = eq_1$, där e är en enhet i $\mathbb{Z}[i]$. Detta resulterar i det gaussiska talet $u = p_2 \ldots p_m = eq_1 q_2 \ldots q_n$. Men det betyder att $N(u) < N(z)$ och alltså att det inte finns något minsta element i mängden C, och således heller inget gaussiskt heltal med en icke-unik primtalsfaktorisering. □

Nu återgår vi till att undersöka de primitiva pythagoreiska trianglarna och deras hypotenusor.

Lemma 4.3. *Det finns inget primtal $p \equiv 1 \pmod 4$ som kan utgöra hypotenusa i fler än en pythagoreisk triangel.*

Bevis. Om det pythagoreiska primtalet p kan utgöra hypotenusa i fler än en triangel uppfyller det likheten $p = s^2 + t^2 = u^2 + v^2$. Det gör att p kan faktoriseras i $\mathbb{Z}[i]$ enligt $p = (s + ti)(s - ti)$. Låt $z = s + ti$ vara ett gaussiskt heltal, eftersom $N(z)$ är ett primtal i $\mathbb{Z}$ innebär det att z är ett gaussiskt primtal, enligt Lemma 4.1. Men om p även kan faktoriseras som $p = (u + vi)(u - vi)$ innebär det även att $w = u + vi$ är ett gaussiskt primtal. Enligt Lemma 4.2. är dock primtalsfaktoriseringen i $\mathbb{Z}[i]$ unik frånsett förekomsten av associerade tal, därför är $s + ti = e(u + vi)$, där e är en enhet. Detta innebär att z och w är samma primtal i $\mathbb{Z}[i]$ och därför kan talet p bara utgöra hypotenusa i en pythagoreisk triangel. □

Sats 4.3. *Om talet n kan faktoriseras som $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r}$, där alla p är pythagoeriska primtal $p \equiv 1 \pmod 4$, kan n vara hypotenusa i exakt*

$$\mathcal{H}_p(n) = 2^{r-1}$$

primitiva pythagoreiska trianglar.

Bevis. Om $n = p_1$ innebär det att n är ett pythagoreiskt primtal som enligt Lemma 4.3. kan utgöra hypotenusa på exakt ett sätt. Detta ger $r = 1$ så $2^{1-1} = 1$.

Enligt Diofantos teori är det också sant att då $n = p_1 p_2$ kan n utgöra hypotenusa på exakt två sätt eftersom

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\end{aligned}$$

Vilket innebär att $r = 2$ så $2^{2-1} = 2$. På samma sätt går det att fortsätta upp till r och det blir tydligt att $\mathcal{H}_p(n) = 2^{r-1}$. □

Exempel 4.2. I Exempel 3.2 togs talet 6205 som exempel på ett tal som endast har pythagoreiska primfaktorer eftersom $6205 = 5 \cdot 17 \cdot 73$. Med hjälp av program 3 i Bilaga B bestämdes att talet utgör hyptenusa i fyra olika primitiva pythagoreiska taltripplar. Detta kan nu också verifieras med hjälp av Sats 4.3.

$$\mathcal{H}_p(6205) = 2^{3-1} = 4$$

Alltså finns det fyra primitiva tripplar med hypotenusan 6205.

I A. H. Beilers *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*, kapitel 14 [1], presenteras en sats för att bestämma i hur många primitiva och icke-primitiva pythagoreiska trianglar n kan vara hypotenusa.

Sats 4.4. *Det finns*

$$\mathcal{H}(n) = \frac{1}{2}((2e_1 + 1)(2e_2 + 1)(2e_3 + 1)\dots(2e_r + 1) - 1)$$

antal pythagoreiska trianglar med hypotenusan n, där n kan faktoriseras $n = 2^{e_0} p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r} q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_s^{f_s}$ där $p_i \equiv 1 \pmod 4$ och $q_i \equiv 3 \pmod 4$.

4.3 Antalet trianglar n kan vara sida i

Med hjälp av slutsatserna i de föregående avsnitten är det lätt att bestämma i hur många pythagoreiska trianglar n kan vara sida.

Sats 4.5. *Talet n kan vara antingen katet eller hypotenusa i exakt*

$$\mathcal{S}_p(n) = \mathcal{K}_p(n) + \mathcal{H}_p(n)$$

primitiva pythagoreiska trianglar.

På samma sätt är det möjligt att bestämma i hur många primitiva *och* icke-primitiva trianglar n kan vara sida.

Sats 4.6. *Talet n kan vara antingen katet eller hypotenusa i exakt*

$$\mathcal{S}(n) = \mathcal{K}(n) + \mathcal{H}(n)$$

pythagoreiska trianglar.

4.4 Antalet trianglar med hypotenusa $< N$

Föregående avsnitt har gett verktyg för att bestämma på hur många sätt ett visst tal kan vara hypotenusa i en pythagoreisk triangel. Detta ger dock inget svar på antalet primitiva pythagoreiska trianglar, $T(N)$, med en hypotenusa mindre än talet N. Denna fråga har besvarats av Derrick Norman Lehmer år 1900.

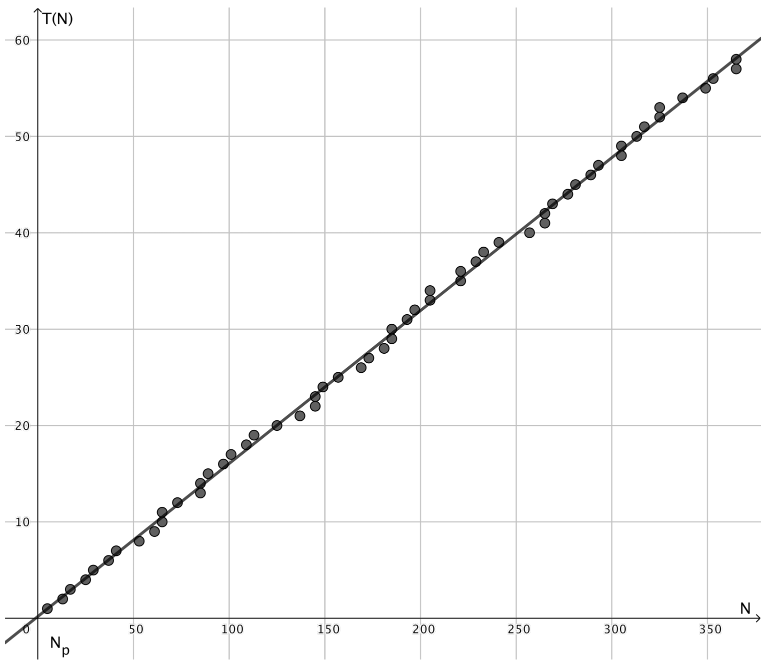
Inledningsvis kan det observeras att då de olika värdena för hypotenusan i primitiva pythagoreiska trianglar ritas upp fås en tydligt linjär funktion som visas i Figur 2. Med hjälp av linjär regression visar det sig att denna linje har ekvationen $T(N) = 0.16N + 0.18$ då alla hypotenusor < 400 har prickats in. Enligt Lehmers funktion är förhållandet mellan N och $T(N)$

$$\frac{T(N)}{N} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.16,$$

då N går mot oändligheten [4]. Detta stämmer med den anpassade funktionen. Den lilla avvikelsen 0.18, som innebär att grafen inte exakt går genom origo, kan bortses från i det här fallet eftersom endast tal < 400 undersökts. I Bilaga A går det att utläsa att det finns 16 primitiva pythagoreiska trianglar med en hypotenusa < 100, Lehmers funktion ger

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 100 \approx 15.9$$

vilket stämmer väl med det förväntade svaret. Det blir genast enkelt att bestämma ungefär hur många primitiva pythagoreiska trianglar det finns upp till ett visst värde på N, exempelvis finns det omkring 159,154 trianglar med en hypotenusa mindre än 10^6.



Figur 2. Antalet primitiva pythagoreiska trianglar, $T(N)$, med hypotenusa $< N$ för $N < 400$.

5 Diskussion

5.1 Slutsats

I vart och ett av uppsatsens avsnitt har metoder för att besvara frågeställningarna presenterats och bevisats. Med hjälp av Euklides formel i Sats 2.2. är det möjligt att konstruera alla primitiva pythagoreiska trianglar, och genom en enklare utökning av satsen blir det också möjligt att konstruera de icke-primitiva trianglarna. Det går dessutom att konstruera trianglar med hjälp av Fibonaccis talserie vilket visat sig vara ett annat sätt att framställa Euklides formel. Ytterligare ett sätt är att konstruera pythagoreiska trianglar av en viss typ, exempelvis där kateten b och hypotenusan c är på varandra följande tal.

Det har också visat sig att talens paritet i primitiva pythagoreiska trianglar är (udda, jämn, udda). Frågan om vilka tal som kan utgöra kateter i primitiva taltripplar besvarades separat för a och b. Alla tal $n > 2$ utom tal $n \equiv 2 \pmod 4$ kan utgöra den korta kateten, a, i primitiva taltripplar. Frågan var inte lika lätt att besvara för den längre kateten, b, men svaret gick att uttrycka i termer av p och q. Det observerades också, liksom för kateten a, att alla tal $n > 2$ utom $n \equiv 2 \pmod 4$ kan utgöra längsta katet i primitiva taltripplar. Vilka tal som kan utgöra hypotenusa, c, i en primitiv taltrippel avgörs helt av talets primfaktorer. Endast tal med primfaktorer enbart av typen $p \equiv 1 \pmod 4$ kan skrivas som en summa av två kvadrater och således vara hypotenusa i primitiva trianglar. Om det även förekommer primtalsfaktorer av andra typer kan talet bara vara hypotenusa i icke-primitiva trianglar. Dessa tre slutsatser leder till att alla tal $n > 2$, förutom tal av typen $n \equiv 2 \pmod 4$ kan utgöra sida i minst en primitiv pythagoreisk triangel, samt att alla tal $n > 2$ kan utgöra sida i någon pythagoreisk triangel, primitiv eller ej.

Problemet att bestämma antalet trianglar ett tal n kan vara sida i bröts upp i två mindre delar - antalet trianglar n är katet i och antalet trianglar n är hypotenusa i. Antalet primitiva pythagoreiska trianglar n kan vara katet i avgörs helt av talets primfaktorer vilket blir tydligt då Euklides formel används som grund för undersökningen. Eftersom kateten n kan ges på två sätt ger det två olika sätt att faktorisera n, men det visar sig att båda dessa sätt resulterar i samma formel för antalet trianglar med kateten n.

För att bestämma antalet trianglar med hypotenusan n användes till stor del slutsatserna från avsnitt 3, om vilka tal som kan utgöra hypotenusa. Några avgörande slutsatser var då att ett tal som är en produkt av två "tvåkvadratstal" kan uttryckas på två sätt som en summa av två kvadrater samt att produkter av pythagoreiska primtal kan utgöra hypotenusa. Med hjälp av ytterligare bevis för primtalen och primtalsfaktoriseringen av de gaussiska talen kunde ett samband, liknande det för antalet kateter n, bestämmas för hypotenusan.

5.2 Framtid

Området pythagoreiska taltripplar är stort och innehåller många intressanta teorier. När hypotenusan undersöks dyker problemet i att framställa ett tal som en summa av två kvadrater upp. Detta problem har många matematiker arbetat med och intressanta upptäckter har gjorts. Pythagoras sats är i grund och botten en diofantisk ekvation $a^2+b^2=c^2$ och denna typ av ekvation, med olika potenser, är av stort intresse. Ett mycket berömt exempel och som relativt nyligen bevisats gäller Fermats stora sats, $a^n+b^n=c^n$. Fermat påstod på 1600-talet att denna diofantiska ekvation helt saknar lösningar för $n > 2$. Detta bevisades dock först på 1990-talet av Andrew Wiles. Detta visar att pythagoras sats och de pythagoreiska trianglarna döljer matematiska frågor som är både intressanta och djupare än man kan ana. Ytterligare undersökningar inom området kan mycket väl leda till nya intressanta frågeställningar. Ett flertal områden inom detta ämne har utelämnats i uppsatsen - bland annat frågor som rör arean, omkretsen, den inskrivna cirkeln samt summan eller produkten av sidorna i pythagoreiska trianglar.

Tack

Först och främst vill jag tacka Hermods för att de erbjuder ett sätt för elever att kunna studera gymnasiet på distans, en alldeles ovärdelig möjlighet som jag hoppas fler ungdomar får uppleva i framtiden. Jag vill även varmt tacka Maria Wersäll, tidigare utbildningschef i Lidingö stad, för att hon satsade på mig som elev och beviljade mig möjligheten till distansstudier. Många tack riktas också till personalen och läkarna på Barnonkologmottagningen på Karoliska Sjukhuset, för deras arbete att rädda mitt, och många andra barns, liv. Avslutningsvis vill jag tacka min underbara mamma - för hennes outtömliga stöd under flera mycket prövande år. Utan er alla skulle detta arbete med största sannolikhet aldrig blivit skrivet.

Referenser

[1] Beiler, Albert H. (1966). The eternal triangle. I *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*. New York: Dover Publ, 104 - 117.

[2] Hardy, Godfrey Harold, Wright, E. M., Heath-Brown, D. R & Silverman, J. H. (2008). The representation of a number by two or four squares. I *An Introduction to the Theory of Numbers*. 6. ed. Oxford: Oxford University Press, 299 - 302.

[3] Horadam, Alwyn. (1961). Fibonacci Number Triples. *The American Mathematical Monthly*, 68(8), 751-753. doi:10.2307/2311978

[4] Lehmer, Derrick. (1900). Asymptotic Evaluation of Certain Totient Sums. *American Journal of Mathematics*, 22(4), 293-335. doi:10.2307/2369728

[5] Stillwell, John (2010). The theorem of pythagoras och Algebraic number theory. I *Mathematics and Its History*. 3rd ed. New York: Springer, 1 - 10, 454.

A Trianglar med hypotenusa $\leq$ 100

Taltripplar	Multipel	Taltripplar	Multipel
(3, 4, 5)	-	(11, 60, 61)	-
(6, 8, 10)	2·(3, 4, 5)	(16, 63, 65)	-
(5, 12, 13)	-	(25, 60, 65)	5·(5, 12, 13)
(9, 12, 15)	3·(3, 4, 5)	(33, 56, 65)	-
(8, 15, 17)	-	(39, 52, 65)	13·(3, 4, 5)
(12, 16, 20)	2·(6, 8 10)	(32, 60, 68)	4·(8, 15, 17)
(7, 24, 25)	-	(42, 56, 70)	14·(3, 4, 5)
(15, 20, 25)	5·(3, 4, 5)	(48, 55, 73)	-
(10, 24, 26)	2·(5, 12, 13)	(24, 70, 74)	2·(12, 35, 37)
(20, 21, 29)	-	(21, 72, 75)	3·(7, 24, 25)
(18, 24, 30)	2·(9, 12, 15)	(45, 60, 75)	15·(3, 4, 5)
(16, 30, 34)	2·(8, 15, 17)	(30, 72, 78)	6·(5, 12, 13)
(21, 28, 35)	7·(3, 4, 5)	(48, 64, 80)	16·(3, 4, 5)
(12, 35, 37)	-	(18, 80, 82)	2·(9, 40, 41)
(15, 36, 39)	3·(5, 12, 13)	(13, 84, 85)	-
(24, 32, 40)	8·(3, 4, 5)	(36, 77, 85)	-
(9, 40, 41)	-	(40, 75, 85)	5·(8, 15, 17)
(27, 36, 45)	9·(3, 4, 5)	(51, 68, 85)	17·(3, 4, 5)
(14, 48, 50)	2·(7, 24, 25)	(60, 63, 87)	3·(20, 21, 29)
(30, 40, 50)	10·(3, 4, 5)	(39, 80, 89)	-
(24, 45, 51)	3·(8, 15, 17)	(54, 72, 90)	18·(3, 4, 5)
(20, 48, 52)	4·(5, 12, 13)	(35, 84, 91)	7·(5, 12, 13)
(28, 45, 53)	-	(57, 76, 95)	19·(3, 4, 5)
(33, 44, 55)	11·(3, 4, 5)	(65, 72, 97)	-
(40, 42, 58)	2·(20, 21, 29)	(28, 96, 100)	4·(7, 24, 25)
(36, 48, 60)	12·(3, 4, 5)	(60, 80, 100)	20·(3, 4, 5)

B Användbara program för TI-84

Kod för TI-84	Förklaring

<pre>Prompt P, Q
If P > Q
Then
  P^2 - Q^2 → A
  2*P*Q → B
  P^2 + Q^2 → C
  Else
  Q^2 - P^2 → A
  2*P*Q → A
  P^2 + Q^2 → A
End
Disp A, B, C</pre>
	Program 1. Detta program tar emot två värden på P och Q som sedan används för att konstruera en pythagoreisk taltrippel enligt Euklides metod.

<pre>Prompt A, B, C
gcd(A, gcd(B, C)) → D
If A^2 + B^2 = C^2
Then
  If D = 1
  Then
  Disp "PRIMITIVE"
  Else
  Disp "MULTIPLE OF:"
  Disp (A/D), (B/D), (C/D)
  End
Else
Disp "NOT A TRIPLE"
End</pre>
	Program 2. Ber användaren mata in en pythagoreisk taltrippel, (A, B, C), och avgör sedan om den utgör en primitiv eller icke-primitiv trippel. I fall då det är en icke-primitiv taltrippel avgör programmet vilken primitiv taltrippel (A, B, C) är en multipel av.

<pre>Prompt N
0 → R
If (round(fPart(N/4) * 4, 0) = 1
and
round(fPart(N/3) * 3, 0) ≠ 0)
Then
  For (I, 1, √(N/2), 1)
    If fPart(√(N-I^2)) = 0
    Then
    R + 1 → R
    End
  End
  Disp R
Else
Disp R
End</pre>
	Program 3. Tar emot ett värde N och avgör om talet kan utgöra hypotenusa eller inte, samt i hur många pythagoreiska trianglar N kan vara hypotenusa.